Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone en particulier ! Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.

Problème 1 : Coup franc au football

On étudie dans ce problème le mouvement d'un ballon de football, assimilé à un point matériel de masse m, dans le champ de pesanteur terrestre d'accélération $\vec{g}$. On négligera l'éventuelle présence d'un·e gardien·ne dans les buts.

Données :

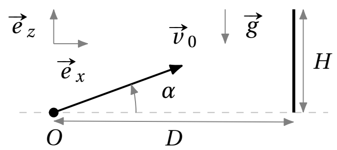
- accélération de la pesanteur $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$;
- masse du ballon $m = 4{,}3\cdot 10^2\,\mathrm{g}$; rayon du ballon $R = 11\,\mathrm{cm}$; constante $C = 0{,}45$;
- masse volumique de l'air $\rho = 1{,}1\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$;
- angle entre l'axe de rotation et l'horizontale $\beta = \pi/2$, vitesse de rotation $\omega = 2\pi \times 10\,\mathrm{Hz}$.

I Tir sans frottement

Dans cette partie, on néglige tout frottement.

I.1.

Le ballon est lancé d'un point O à l'altitude $z = 0$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ formant l'angle α avec l'horizontale et on choisit l'axe x de telle sorte que $\dot{y}_0 = 0$.



(**a**) Établir les équations paramétriques du mouvement $x(t)$ et $z(t)$. On justifiera brièvement que le mouvement est contenu dans le plan engendré par $(O, \vec{g}, \vec{v}_0)$.

(**b**) En déduire l'équation de la trajectoire.

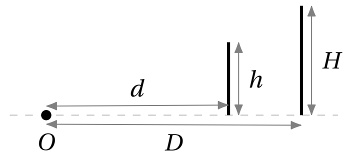
I.2. Le ballon doit attendre les buts situés à une distance D du point O, sous une barre horizontale placée à l'altitude H. On étudie les différentes trajectoires obtenues pour v_0 fixée, quand on fait varier l'angle α.

(**a**) Déterminer l'expression de la valeur minimale $v_{\min 1}$ de v_0 pour que le ballon atteigne les buts.

(**b**) Déterminer également l'expression de la valeur minimale $v_{\min 2}$ de v_0 pour que le ballon passe juste sous la barre horizontale.

(**c**) Calculer les valeurs de $v_{\min 1}$ et $v_{\min 2}$ pour $D = 35\,\mathrm{m}$ et $H = 2{,}5\,\mathrm{m}$.

I.3. Un « mur » de joueurs de hauteur h est placé entre le point O et les buts, à la distance d du point O.



(**a**) Déterminer l'expression de la vitesse minimale $v_{\min 3}$ de v_0 pour que ballon puisse passer au dessus du mur et calculer sa valeur pour $d = 9{,}2\,\mathrm{m}$ et $h = 2{,}1\,\mathrm{m}$.

(**b**) Déterminer l'angle α puis la valeur de la vitesse v_0 pour que le ballon rentre dans le but en passant juste sous la barre horizontale, après être passé juste au dessus du mur.

II Tir avec effet

On modélise dans cette partie les effets du frottement de l'air et d'une éventuelle rotation de la balle sur elle même (coup de pied « brossé »). En notant $\vec{v}$ le vecteur vitesse de la balle on montre qu'il apparaît deux nouvelles forces qui dépendent du vecteur $\vec{v}$ et qui, dans le régime considéré[i], se mettent sous la forme :

- force de frottement :
$$\vec{F}_{\mathrm{f}} = -\frac{1}{2} C\pi R^2 \rho v \vec{v};$$
avec C une constante sans dimension et v la norme de la vitesse.
- force dite « de Magnus[ii] »
$$\vec{F}_{\mathrm{M}} = mK_{\mathrm{M}}\left(\dot{y}\vec{e_x} - \dot{x}\vec{e_y}\right);$$
avec K_{M} une constante positive.

La balle est de nouveau lancée du point O, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ formant un angle α avec l'horizontale et on choisit l'axe x de telle sorte que $\dot{y}_0 = 0$.
On ne se préoccupe plus d'un éventuel mur[iii].

II.1. Montrer qualitativement, en ne considérant que la force $\vec{F}_{\mathrm{M}}$, qu'elle permet de courber la trajectoire dans un plan horizontal. On tracera sur un schéma une allure de trajectoire précisant les directions de $\vec{v}$, $\vec{F}_{\mathrm{M}}$ et $\vec{a}$.

II.2. (**a**) Établir l'équation différentielle d'évolution de la coordonnée $\dot{z}$ de la vitesse.

[i] On considère entre autres la norme v et la vitesse de rotation constantes pour la durée du tir.
[ii] H.G. Magnus (1802-1870), physicien allemand.
[iii] L'intérêt de ce genre de tir est justement de le contourner.

(**b**) En déduire l'expression de la vitesse limite du mouvement selon $\overrightarrow{e_z}$, ainsi que le temps caractéristique correspondant. Calculer leurs valeurs pour $v = v_0 \equiv 40\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

(**c**) Est-il légitime de négliger l'effet de la force de frottement ?

II.3. On néglige dans toute la suite la force $\overrightarrow{F}_\mathrm{f}$.

(**a**) On cherche à déterminer les expressions de $x(t)$ et $y(t)$. On propose dans cette question une méthode utilisant une représentation complexe en utilisant $q = x + iy$, avec $i^2 = -1$.

D'autres méthodes sont possibles : vous pouvez utiliser celle que vous préférez pour parvenir aux expressions de $x(t)$ et $y(t)$.

Montrer que la dérivée temporelle $\dot{q}$ de q obéit à une équation différentielle linéaire de la forme :

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} = 0,$$

avec γ une constante complexe qu'on exprimera en fonction de K_M.

(**b**) En déduire l'expression de $\dot{q}(t)$ puis celles de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$.

(**c**) Déterminer enfin $q(t)$ et en déduire $x(t)$ et $y(t)$.

(**d**) Préciser le rayon de courbure algébrique de la trajectoire et calculer sa valeur quand la vitesse initiale a pour norme v_0 et pour angle $\alpha = 20°$.

II.4. On étudie la déviation selon y de la trajectoire par rapport au cas $K_\mathrm{M} = 0$. On donne l'expression, en fonction de la masse volumique ρ de l'air, de la vitesse de rotation ω du ballon et de l'angle β du tir :

$$mK_M = \frac{1}{2}\pi R^3 \rho\omega \sin(\beta). \tag{1}$$

(**a**) Déterminer la position du ballon selon $\overrightarrow{e_y}$ quand il atteint le but en $x = D$. Commenter quant à l'utilité de ce genre de tir.

(**b**) On considère de nouveau l'effet de la force $\overrightarrow{F}_\mathrm{f}$. Quel sera-t-il qualitativement sur la vitesse ? Déterminer le rayon de courbure algébrique quand la vitesse vaudra $v_0/2$ et en déduire la nouvelle allure de la trajectoire. Que peut-on dire de la déviation ?

Problème 2 : Détermination du diamètre angulaire de Bételgeuse

On présente une description simplifiée de l'expérience ayant permis à Michelson[iv] et Pease[v] de mesurer, en 1921, le diamètre angulaire de l'étoile Bételgeuse, dans la constellation d'Orion.

Données :

- célérité de la lumière dans le vide $3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$;
- longueur d'onde des rayonnements optiques émis par les étoiles : $\lambda = 575\,\mathrm{nm}$
- on prendra l'indice de l'air égal à $n = 1$.

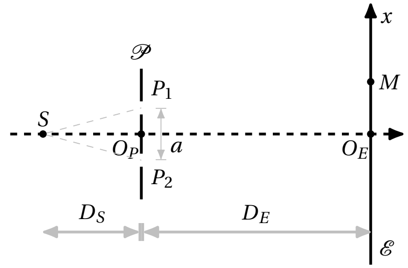
On rappelle également l'identité trigonométrique :

$$\cos(u) + \cos(v) = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

I Expérience des trous d'Young

On considère une source ponctuelle lumineuse S émettant un rayonnement monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ. Elle éclaire un plan $\mathscr{P}$ situé à la distance D_S percé de deux trous P_1 et P_2 identiques tels que S est sur la médiatrice de $[P_1P_2]$ orthogonale au plan $\mathscr{P}$. On note a la distance entre les deux trous considérés ponctuels.

On observe la figure d'interférences sur un écran $\mathscr{E}$ parallèle au plan $\mathscr{P}$ et situé à la distance D_E. On note O_E la projection orthogonale de S sur $\mathscr{E}$ et on étudie les variations de l'éclairement avec la position d'un point M situé sur l'intersection de l'écran et du plan défini par S, P_1 et P_2, sur un axe noté $(O_E x)$: on pose $\overrightarrow{O_E M} = x\overrightarrow{e_x}$.



I.1. (**a**) Déterminer dans le cas général la différence de marche δ entre les ondes lumineuses parvenant en un point M de coordonnée x en fonction des paramètres du problème.

(**b**) Proposer une ou des conditions portant sur les paramètres géométriques et λ pour que les points M où les interférences sont constructives soient équidistants les uns des autres. On admet dans toute la suite que ces conditions sont vérifiées.

On définit l'interfrange, notée i, comme la distance minimale entre deux points d'interférences constructives. Établir dans ces conditions l'expression de l'interfrange en fonction de λ et des paramètres géométriques du dispositif.

(**c**) En déduire que l'intensité lumineuse I varie en fonction de x selon :

$$I = 2I_0\left(1 + \cos(\alpha x)\right), \tag{2}$$

avec α une constante dont donnera l'expression en fonction de λ, D_E et a. Que représente I_0 ?

I.2. On envisage d'éventuelles modifications de l'intensité lumineuse sur l'écran quand on déplace la source S. On suppose pour cette question que $D_S = D_E$. On justifiera soigneusement les réponses apportées.

[iv] Albert Abraham Michelson (1852–1931), physicien américain

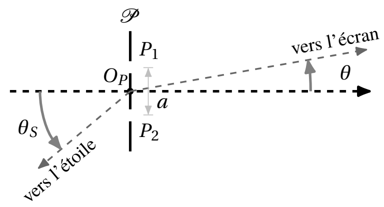
[v] Francis Pease (1881–1938), physicien américain

(**a**) On rapproche la source jusqu'à diviser D_S par 2. Comment est modifiée la figure d'interférences ?

(**b**) On reprend $D_S = D_E$. De quelle distance minimale doit-on translater la source S selon $\overrightarrow{e_x}$ pour que le point O_E soit sur une frange sombre ?

I.3. On fait tendre la distance D_E vers l'infini.

On caractérise alors le point M où on observe l'intensité par l'angle θ sous lequel il est vu dans le plan $(S; P_1; P_2)$ depuis le point O_P. De même, la source ponctuelle est à l'infini, caractérisée par un angle θ_S.



(**a**) Établir la nouvelle expression de la différence de marche en fonction entre autres des angles θ et θ_S.

(**b**) On considère dans toute la suite que les angles θ et θ_S sont petits. En déduire, au moyen d'une approximation, que l'intensité a pour expression :

$$I = 2I_0\left(1+\cos\left(\beta(\theta-\theta_S)\right)\right), \tag{3}$$

avec β une constante dont donnera l'expression en fonction de λ et a. Définir comme au **I.1b** une interfrange angulaire $\Delta\theta_\infty$ dont on établira l'expression.

II Interféromètre stellaire

Dans l'expérience, les interférences sont réalisées en plaçant des fentes sur l'objectif d'un télescope. On admet que les résultats précédents sur les interférences à l'infini produites par deux trous d'Young distants de a s'appliquent.

II.1. (**a**) On considère une étoile considérée ponctuelle à l'infini vue sous l'angle $\theta_S = 0$. La distance a vaut ici $a = 30\,\text{cm}$. Déterminer la valeur de l'interfrange angulaire $\Delta\theta_\infty$. Indiquer brièvement quel devra être le grossissement du télescope pour qu'on puisse distinguer les franges d'interférence.

(**b**) Un·e scientifique étourdi·e a oublié un cendrier en verre sur l'un des trous. Comment est modifiée la figure d'interférences ? On proposera des ordres de grandeur pour l'épaisseur e_v et l'indice n_v du cendrier pour quantifier cet effet. Commenter.

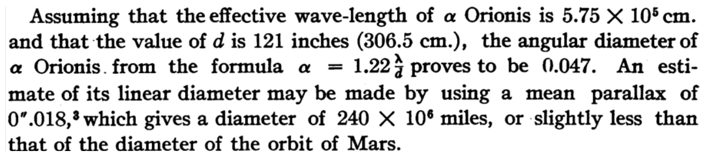
II.2. On considère deux sources ponctuelles à l'infini vues sous les angles $\theta_{S_1} = 0$ et $\theta_{S_2} \neq 0$ dont on suppose qu'elles émettent un rayonnement de même longueur λ et de même intensité. On admet que l'intensité sur l'écran est la somme des intensités données chacune par la formule 3. Établir l'expression de l'intensité totale en fonction de la direction d'observation θ.

II.3. Montrer que, pour θ_{s_2} fixé, il existe une valeur minimale de a pour laquelle on n'observe plus de franges. Donner son expression.

II.4. On considère maintenant l'étoile Bételgeuse, comme un objet lumineux à l'infini non ponctuel, caractérisé, dans le plan $(O_P P_1 P_2)$, par un diamètre angulaire $\Delta\theta_B$[vi].

En adaptant les résultats **II.3**, établir l'expression de la valeur minimale de d pour laquelle on n'observe plus de franges. Dans l'article de 1921, les auteurs observent cette disparition des franges pour $a_B = 3{,}1\,\text{m}$. En déduire la largeur angulaire $\Delta\theta_B$ de Bételgeuse puis son rayon si on admet qu'elle se situe à une distance de $D_B = 5{,}2\cdot 10^{18}\,\text{m}$.

II.5. Question subsidiaire **non notée**, à regarder plus tard.


Assuming that the effective wave-length of α Orionis is 5.75×10^5 cm. and that the value of d is 121 inches (306.5 cm.), the angular diameter of α Orionis from the formula $\alpha = 1.22\frac{\lambda}{d}$ proves to be 0.047. An estimate of its linear diameter may be made by using a mean parallax of 0".018,[3] which gives a diameter of 240×10^6 miles, or slightly less than that of the diameter of the orbit of Mars.

Commenter l'extrait de l'article. En particulier :

- la valeur de la longueur d'onde,
- le terme 1,22,
- la valeur 0,047,
- le terme de "parallax",
- la valeur du diamètre obtenu.

Les données sont celles de l'article historique :

Michelson, A. A., & Pease, F. G. (1921). "Measurement of the diameter of alpha-orionis by the interferometer". Proceedings of the National Academy of Sciences, 7(5), 143–146.

Le diamètre du téléscope n'est que de $a = 2{,}5\,\text{m}$ mais un ingénieux système de 4 miroirs dont deux coulissent au-delà de l'ouverture du télescope permet de réaliser un système équivalent allant jusqu'à $a = 6\,\text{m}$. Il s'agit de la première utilisation de la technique dite de la « synthèse d'ouverture » dans laquelle l'utilisation de plusieurs télescopes permet d'une certaine manière d'atteindre la résolution d'un seul télescope aussi grand que la surface totale englobée par ces télescopes.

[vi] On considère pour simplifier qu'elle est toujours ponctuelle dans la direction perpendiculaire à ce plan

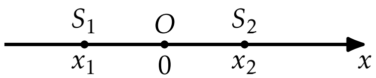
Exercice 1 : Trombone de Koenig

On considère un dispositif de mesure de la vitesse du son.

I Interférences d'ondes sonores

I.1. On considère deux sources ponctuelles S_1 et S_2 émettant des ondes sinusoïdales synchrones de fréquence f et de célérité c dont on étudie la propagation le long d'un axe Ox. On note respectivement x_1 et x_2 (avec $x_1 < 0 < x_2$) les abscisses de S_1 et S_2.

Les perturbations émises par chacune des sources, respectivement notées $\xi_1(t,x)$ et $\xi_2(t,x)$, ont même amplitude notée X et sont en phase ; on a en particulier à tout instant t :



$$\xi_1(t,x_1) = \xi_2(t,x_2).$$

(**a**) Donner l'expression de $\xi_1(t,x)$ pour tous t et x. On choisira la phase de ξ_1 nulle à l'instant initial en $x = x_1$ de manière à avoir $\xi_1(t=0, x=x_1) = X$.

(**b**) Déterminer l'expression de la perturbation totale dans les deux zones :

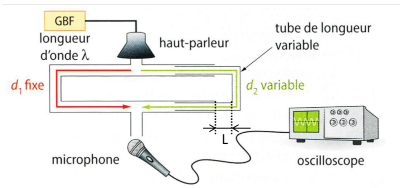
- $x_1 < x < x_2$,
- $x > x_2$.

I.2. (**a**) Proposer une condition sur $x_2 + x_1$ pour que la perturbation en $x = 0$ oscille avec une amplitude de $2X$.

(**b**) Proposer une condition sur $x_2 - x_1$ pour que la perturbation en $x > x_2$ soit nulle à chaque instant.

II Trombone

Un trombone de Koenig[a] est formé de deux tubes coudés coulissant. L'un est fixe et est muni de deux ouvertures, on note d_1 sa longueur totale. On place un haut-parleur alimenté par un générateur basse fréquence (`GBF`) devant l'une et un microphone devant l'autre. Le signal du microphone est envoyé sur un oscilloscope.
L'autre tube coulisse dans le premier. On note d_2 sa longueur variable.



[a] Karl Rudoph Koenig(1832–1901), physicien allemand

Données : fréquence du `GBF` $f = 7\,\text{kHz}$.

II.1. À laquelle des deux situations de la question **I.1b** correspond cette expérience. Quelle est l'analogue pour les deux sources S_1 et S_2 d'un coulissement du tube mobile ?

II.2. Le signal du haut-parleur sur l'oscilloscope a initialement une amplitude de $20\,\text{mV}$. En translatant le tube d_2 on observe que l'amplitude A des oscillations varie en fonction de la longueur d_2 entre :

- un minimum $A_{\text{min}} = 3\,\text{mV}$
- un maximum $A_{\text{max}} = 40\,\text{mV}$

(**a**) La variation minima'le de distance d_2 entre un maximum et un minimum de A vaut $d_{2\,\text{min}} = 2{,}5\,\text{cm}$. En déduire la vitesse du son dans les conditions de l'expérience.

(**b**) Déterminer le rapport des amplitudes de chacune des ondes sonores reçues par le microphone provenant de chacune des tubes.

(**c**) Déterminer la distance minimale L dont on a dû translater le tube d_2 pour observer le premier maximum.

II.3. Le haut parleur émet désormais une somme de sinusoïdes de même amplitude mais de fréquences f_1 et f_2 proches de f et qui diffèrent de $f_2 - f_1 = \Delta f = 2\,\text{Hz}$. Décrire le signal reçu par le haut-parleur et montrer qu'on pourrait obtenir un signal indiscernable en n'émettant qu'une seule sinusoïde de fréquence f si on translatait le tube 2 à une vitesse constante dont on donnera la valeur.